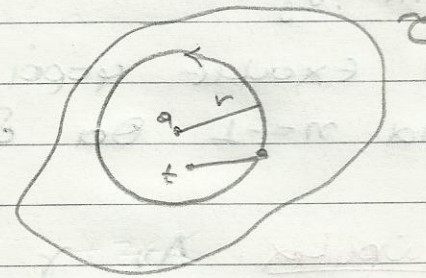
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΣΕ ΔΙΣΚΟ:

1ο Θεώρημα Cauchy:

Έστω $f:\tau\to\mathbb{C}$ ολόμορφή και συνεχώς διαφορίσιμη και $\overline{B(\alpha,r)}\subseteq\tau$ και ας είναι γ θετ. προσανατολισμένη περιφέρεια του δίσκου τότε:



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw \quad , \quad \forall z\in B(\alpha,r)$$

Αποδ

Έστω σταθερό $z\in B(\alpha,r)$

Έτσι $\forall w\in\gamma$ και $t\in[0,1]$ το

$$J=z+t(w-z)=(1-t)z+tw\in\overline{B(\alpha,r)}$$

$$h(t):=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w+t(z-w))}{w-z}\,dw \quad , \quad t\in[0,1]$$

αλλα $\varphi(J)=\int_\gamma f(z,J)\,dz \Rightarrow \varphi'(J)=\int_\gamma f_J(z,J)\,dz$ τοτε

$$h'(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(w+t(z-w))\,dw$$

$$F(w)=\frac{f(z+t(w-z))}{t} \quad , \quad w\in\gamma \Rightarrow F'(w)=f'(z+t(w-z)), \; w\in\gamma$$

Έτσι απο Θεωρ Newton-Leibnitz $h'(t)=0$, $\forall t\in(0,1]$

Αρα, λογω συνέχειας $h'(0)=0$ αρα $\forall t\in[0,1]: h'(t)=0$

$\Rightarrow h(t)=c$, c: σταθ $\forall t\in[0,1]$

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = h(1) = h(0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw = f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} =$$

$$=2\pi i f(z)$$

ΠΧ 1

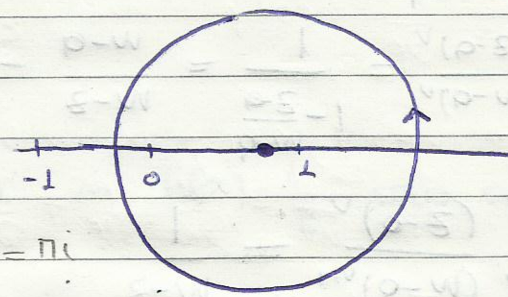
$f(z)=z^2$ Εφαρμόζω $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2}{z-1} = z^2\Big|_{z=1} = 1 = f(1)$$

ΠΧ 2

Να υπολογιστεί το

$\int_\gamma \frac{z^2}{z^2-1}\,dz$ κατά μήκος της καμπύλης γ με σχήμα:



ΛΥΣΗ

$$\int_\gamma \frac{z^2/z+1}{z-1}\,dz = 2\pi i\, \frac{z^2}{z+1}\Big|_{z=1} = 2\pi i\,\frac{1}{2} = \pi i$$

Για την παράγωγο (Υποθέτουμε ότι είναι παραγωγ. με συνεχ. παράγωγο)

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dz\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(w)}{w-z}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

Άρα,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

Επίσης

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^3}\,dw$$

$\vdots$

$$f^{(\nu)}(z) = \frac{\nu!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{\nu+1}}\,dw$$

Μας λέει πως να υπολογίζουμε ολοκληρώματα αυτής της μορφής

για παράδειγμα:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2}{(z-1)^{30}}\,dz = f^{(29)}(z) = 0$$

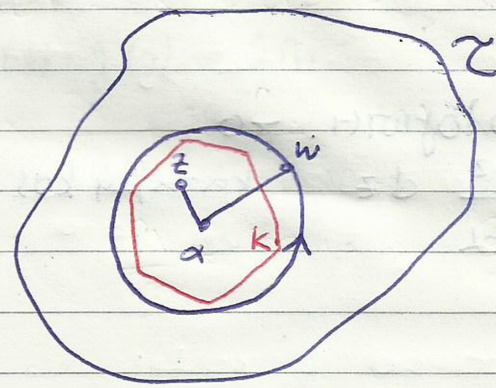
Εστω $f : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ με $\overline{B(a,R)} \subseteq \mathcal{T}$, f ολόμορφη με συνεχή παράγωγο τοτε η f εχει αναπτυγμα Taylor στο $B(a,R)$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu' (z-a)^\nu \Rightarrow a_\nu = a_\nu' \text{ (μοναδικά)}$$

Εστω z σταθερο στο $B(a,R)$

τοτε $\forall w \in \gamma$ εχουμε

$\frac{|z-a|}{|w-a|} < 1$ οποτε:



$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-a)^\nu}{(w-a)^\nu} = \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{w-a}{w-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-a)^\nu}{(w-a)^{\nu+1}} = \frac{1}{w-z}$$

Εστω K συμπαγες $\subseteq B(a,R)$, $z \in K$

Ετσι το,

$$\sup_{z\in K} \left| \frac{z-a}{w-a} \right| = \lambda < 1 \leadsto \left| \frac{(z-a)^\nu}{(w-a)^\nu} \right| \leq \lambda^\nu, \ \forall z \in K$$

απο κρ. συγκρισης λ^ν συγκλινει ομοιομορφα $\forall z \in K$ και τοτε το $\left|\frac{(z-a)^\nu}{(w-a)^\nu}\right|$ συγκλινει ομοιομορφα

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-a)^\nu}{(w-a)^{\nu+1}} dw =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{\nu+1}} dw \right) (z-a)^\nu = \sum_{\nu=0} a_\nu (z-a)^\nu$$

οπου

$$a_\nu := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{\nu+1}} dw = \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}$$

Πχ

Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor, η $f(z)=\frac{1}{z}$ στο $\alpha=1$

Λύση

Ο μέγιστος κύκλος που αναπτύσσεται η f είναι ο δίσκος $B(1,1)$, $\tau = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Έτσι:

$$f(z)=\frac{1}{z}=\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu (z-1)^\nu$$

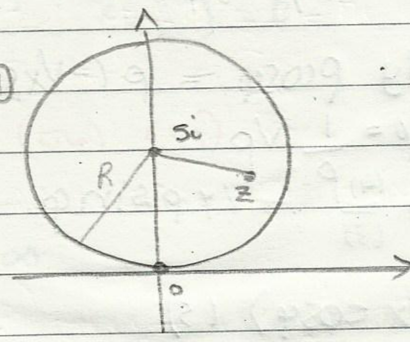
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1+1}=\frac{1}{1-(\underbrace{-(z-1)}_{\theta})}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot(z-1)^\nu$$

Πχ

Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor η $f(z)=\frac{1}{z}$ στο $a=5i$

Λύση

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-5i+5i}=\frac{1/5i}{1+\frac{z-5i}{5i}} \quad ①$$



$$\underbrace{\left|\frac{z-5i}{5i}\right|}_{=|\theta|}=\frac{|z-5i|}{5}<1$$

Άρα, ① $$\frac{1}{z}=\frac{1/5i}{1-\left(-\frac{z-5i}{5i}\right)}=\frac{1}{5i}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot\frac{(z-5i)^\nu}{(5i)^\nu}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot\frac{(z-5i)^\nu}{(5i)^{\nu+1}}$$

Πχ

$f(z)=\frac{1}{z^2}$ με κέντρο το $5i$

$$\left(\frac{1}{z}\right)'=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(5i)^{\nu+1}}(z-5i)^\nu\right)'=\left(\frac{1}{5i}+\frac{-1}{(5i)^2}(z-5i)+\frac{1}{(5i)^3}(z-5i)^2+\dots\right)'=$$

$$=-\frac{1}{(5i)^2}+\frac{2}{(5i)^3}(z-5i)+\frac{3}{(5i)^4}(z-5i)^2+\dots=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(5i)^{\nu+1}}\nu\cdot(z-5i)^{\overset{k}{\nu-1}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-5i)^k$$

Άσκηση 32 (σελ 164)

Ν.δ.ο σε πολικές συντεταγμένες (ρ,φ) οι συνθήκες Cauchy-Riemann παίρνουν τη μορφή
$u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\varphi$ και $v_\rho = -\frac{1}{\rho} u_\rho$

ΛΥΣΗ

$z = x+iy \Longrightarrow z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow x = \rho\cos\varphi$ & $y = \rho\sin\varphi$ (1)

Επίσης $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$ (2)

$$u_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = u_x \frac{\partial x}{\partial \rho} + u_y \frac{\partial y}{\partial \rho} \quad (3)$$

$$(1) \to \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi \text{ και } \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi \text{ και } \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi \quad (4)$$

$$(3) \xrightarrow[(4)]{(2)} \begin{cases} u_\rho = v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi \\ v_\varphi = \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = v_x\frac{\partial x}{\partial \varphi} + v_y\frac{\partial y}{\partial \varphi} \overset{(4)}{=} \end{cases}$$

$$= -v_x\rho\sin\varphi + v_y\rho\cos\varphi = \rho(-v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi) =$$

$$= \rho u_\rho \Rightarrow u_\rho = \frac{1}{\rho} v_\rho$$

$$u_\varphi = u_x\frac{\partial x}{\partial \varphi} + u_y\frac{\partial y}{\partial \varphi} \overset{(4)}{\underset{(3)}{=}} -v_y\rho\sin\varphi - v_x\rho\cos\varphi =$$

$$= -\rho(v_y\sin\varphi + v_x\cos\varphi) \quad (5)$$

Έτσι, $v_\rho = v_x\frac{\partial x}{\partial \rho} + v_y\frac{\partial y}{\partial \rho} = v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi$ (6)

$$(5),(6) \to u_\varphi = -\rho v_\rho \Rightarrow v_\rho = -\frac{1}{\rho} u_\varphi$$

Παράδειγμα 4.19.2 (σελ 153)

Να επιλυθεί η εξίσωση $\sin(z-i) = 1$

ΛΥΣΗ

Θέτω $w = z-i$ άρα ισοδυνάμως $\sin(w) = 1$

ισοδύναμα $\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) = 1 \Rightarrow e^{2iw} - 2ie^{iw} - 1 = 0$

Θέτω $J = e^{iw} \Rightarrow J^2 - 2iJ - 1 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow e^{iw} = J = i$

άρα $iw = \log(i) := \log|i| + i\arg i = i\frac{\pi}{2} + i2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Συνεπώς, $w = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Έτσι, η λύση της εξίσωσης $\sin(z-i) = 1$ είναι

$z = w + i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

Παράδειγμα 4.21.4 (σελ 157)

Εαν $z_n = \frac{i}{n}$ $\quad n=1,2,\dots$

Νδο $\lim_{n\to\infty} z_1^{z_1} \cdot z_2^{z_2} \cdots z_n^{z_n} = 0$

ΛΥΣΗ

$$z_n^{z_n} = e^{z_n \operatorname{Log} z_n} = e^{\frac{i}{n}\operatorname{Log}\frac{i}{n}} = e^{\frac{i}{n}\left(\log\left|\frac{i}{n}\right| + i\operatorname{Arg}\frac{i}{n}\right)} =$$

$$= e^{i/n\left(\log\frac{1}{n} + i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i/n\left(-\log n + \frac{\pi}{2}i\right)} = e^{-i\frac{\log n}{n} - \frac{\pi}{2n}}$$

Τοτε

$$|z_n^{z_n}| = \left|e^{-\frac{i}{n}\left(\log n - \frac{\pi}{2n}\right)}\right| = e^{-\pi/2n}$$

Οποτε

$$\lim_{n\to\infty}|z_1^{z_1}\cdots z_n^{z_n}| = \lim_{n\to\infty}|z_1^{z_1}|\cdots|z_n^{z_n}| = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{2\cdot 2}}\cdots e^{-\frac{\pi}{2n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = e^{-\frac{\pi}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}}_{=+\infty}} = 0$$

Τοτε $\lim_{n\to\infty}\left(z_1^{z_1}\cdots z_n^{z_n}\right) = 0$

Παράδειγμα 4.18.5 (σελ 151)

Νδο

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right| < \infty$$

ΛΥΣΗ

$e^{in} = \cos n + i\sin n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$$

$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ επειδη $\sum\frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum\frac{\cos n}{n^2} < \infty$

Ομοια και $\sum\frac{\sin n}{n^2} < \infty$ συγκλίνουν απολυτα

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2} < \infty$ απολυτα $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right| < \infty$.